Développement : Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Analyse & Probabilités

Références : [QUE] Queffélec H., Zuily C., *Analyse pour l'agrégation, 4ème édition*, Dunod, 2013, p270.
Pour 2-3 idées : [GX] Gourdon X., *Les maths en tête, Analyse, 2ème édition*, ellipses, 2008, p401.

Pour les leçons :
- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 203 : Utilisation de la notion de compacité.
- 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
- 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de continues de $I := [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit F l'ensemble des fonctions de E dérivables nulle part.
On admet (à mettre dans le plan dans ce cas) que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
Le but de ce développement est de montrer le théorème de densité suivant :

Théorème 1.
F est dense dans E.

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| > n|x-y|\}.$$

⋆ Étape 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que A_n est ouvert.
Pour cela, on va montrer que $A_n^c := E \backslash A_n$ est fermé. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \in A_n^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in E$ pour $\|\cdot\|_\infty$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_p \in A_n^c$, donc :

$$\exists x_p \in [0,1] \quad \forall y \in [0,1] \quad |f_p(x_p) - f_p(y)| \leqslant n|x_p - y|.$$

Comme $x_p \in [0,1]$ qui est compact, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente. On suppose donc que $x_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x \in E$ (quitte à remplacer $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par la suite extraite en question).
On va passer à la limite. Pour cela, on écrit :

$$|f_p(x_p) - f(x)| \leqslant |f_p(x_p) - f(x_p)| + |f(x_p) - f(x)|.$$

Comme $x_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et f continue en x, on a $|f(x_p) - f(x)| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En outre,

$$|f_p(x_p) - f(x_p)| \leqslant \|f_p - f\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc :

$$\lim_{p\to+\infty} |f_p(x_p) - f(x)| = 0.$$

Il vient, si $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant \underbrace{|f(x) - f_p(x_p)|}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{|f_p(x_p) - f_p(y)|}_{\leqslant n|x_p - y| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} n|x-y|} + \underbrace{|f_p(y) - f(y)|}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \\ &\leqslant n|x-y|. \end{aligned}$$

Donc $f \in A_n^c$, ce qui montre que A_n^c est fermé, et donc :

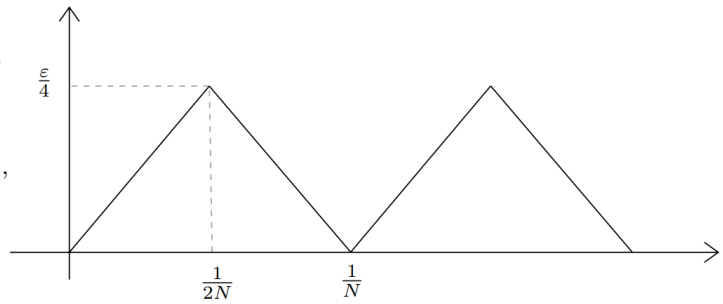
$$\boxed{A_n \text{ est ouvert.}}$$

⋆ Étape 2 : Montrons que A_n est dense dans E. Pour cela, on va montrer que A_n est dense dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions polynomiales de E.

Soit $P \in \mathcal{F}$. **Fixons** $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose, conformément au schéma ci-contre :

$$\forall x \in [0,1] \quad g_p(x) = \begin{cases} \dfrac{N}{2p}x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2N} \\ \dfrac{1}{2p}(1 - Nx) & \text{si } \dfrac{1}{2N} \leqslant x < \dfrac{1}{N} \end{cases},$$

et on prend g_p $\dfrac{1}{N}$-périodique.



Déjà, $g_p \in E$ (limites latérales en tout point finies et égales). Ensuite, par construction, $\|g_p\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{4p}$. Donc :

$$\|g_p + P - P\|_\infty < \frac{1}{p}.$$

On a prouvé que $(g_p + P)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers P pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Il reste à prouver que $g_p + P \in A_n$.
Soit $x \in [0,1]$. On se donne $k \in [\![0; N-1]\!]$ tel que $x \in \left[\dfrac{k}{2N}; \dfrac{k+1}{2N}\right]$, et soit $y \in \left[\dfrac{k}{2N}; \dfrac{k+1}{2N}\right]$.
Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |g_p(x) + P(x) - g_p(y) - P(y)| &\geqslant ||g_p(x) - g_p(y)| - |P(x) - P(y)|| \\ &\geqslant |g_p(x) - g_p(y)| - |P(y) - P(x)| \\ &\geqslant \frac{N}{2p}|x-y| - \underbrace{\|P'\|_{\infty,[0,1]}}_{:=M}|y-x|, \end{aligned}$$

grâce à l'expression et g_p et à l'inégalité des accroissements finis. Donc :

$$|g_p(x) + P(x) - g_p(y) - P(y)| \geqslant \left(\frac{N}{2p} - M\right)|x-y|.$$

En prenant N assez grand tel que $\dfrac{N}{2p} - M > n$, on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad |g_p(x) + P(x) - g_p(y) - P(y)| > n|x-y|,$$

ce qui prouve que $g_p + P \in A_n$.
Donc A_n est dense dans $\mathcal{F}$.
Maintenant, soit $f \in E$, et soit $\varepsilon > 0$. Le théorème d'approximation de Weierstrass affirme que $\mathcal{F}$ est dense dans E. Donc :

$$\exists P \in \mathcal{F} \quad \|P - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme A_n est dense dans $\mathcal{F}$:

$$\exists g \in A_n \quad \|g - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$\|g - f\|_\infty \leqslant \|g - P\|_\infty + \|P - f\|_\infty < \varepsilon.$$

$$\boxed{A_n \text{ est par conséquent dense dans } E.}$$

⋆ <u>Étape 3 :</u> Concluons avec le théorème de Baire. Posons à cet effet :

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

On a $A \subset E$ qui est complet, donc E est un espace de Baire, et A est une intersection dénombrable d'ouverts denses de E. D'après le théorème de Baire, A est dense dans E.
Montrons enfin que $A \subset F$. Soit $f \in A$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f \in A_n$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \exists y_n \in [0,1] \quad |f(x) - f(y_n)| > n|x - y_n|. \tag{1}$$

Soit $x \in [0,1]$ et supposons par l'absurde que f soit dérivable en x. Alors, la fonction :

$$y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

serait continue sur $[0,1]$. Elle serait donc bornée :

$$\exists M' > 0 \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Mais cela contredit (1). Donc $f \in F$. Comme A est dense dans E :

$$\boxed{F \text{ est dense dans } E,}$$

ce qui achève la preuve. □